УДК 519.21:378.147 DOI:10.34142/nc.2024.3.76

Парадокси теорії ймовірностей та їх використання в навчальному процесі

Євгенія Свіщова,
Ольга Дьячкова

Імовірно, найбільший парадокс полягає в тому,
що в математиці існують парадокси.
Е. Каснер

Теорія ймовірностей є фундаментальною галуззю математики, яка вивчає випадкові явища та події. Її значення в сучасному світі важко переоцінити, оскільки вона знаходить застосування в багатьох сферах життя та науки.

Теорію ймовірностей використовують для оцінки фінансових ризиків в умовах невизначеності. Наприклад, вона допомагає в моделюванні цін на акції, оцінці вартості опціонів і страхуванні ризиків. Банки та фінансові установи застосовують ймовірнісні моделі для прогнозування можливих збитків і оптимізації інвестиційних портфелів. У соціальних науках і психології теорію ймовірностей використовують для вивчення поведінки людей, моделювання соціальних явищ і прогнозування поведінкових тенденцій. Це дозволяє краще розуміти соціальні процеси та приймати ефективні управлінські рішення. У сфері IT теорія ймовірностей є основою багатьох алгоритмів машинного навчання та штучного інтелекту. Її використовують для класифікації, кластеризації та прогнозування на основі великих масивів даних. У сфері інженерії не обійтись без теорії ймовірностей при моделюванні та аналізу систем із невизначеністю, таких як системи зв'язку, мережі передачі даних і електронні пристрої. З її допомогою оцінюють надійність і ефективність цих систем, а також передбачають можливі збої. У медицині теорію ймовірностей використовують для оцінки ризиків розвитку захворювань, ефективності лікування і прогнозування результатів медичних втручань. Вона також допомагає у плануванні клінічних досліджень та аналізі їх результатів.

Цей перелік застосувань теорії ймовірностей можна продовжувати, мабуть, до нескінченності. Як влучно написав ще в 1812 р. в роботі «Аналітична теорія ймовірностей» відомий французький математик П'єр Симон Лаплас: «Цікаво те, що науці, яка почалась із розгляду азартних ігор, судилося стати одним з найважливіших об'єктів людського знання» [1]. Тому зрозуміло, чому останнім часом проблема засвоєння студентами різних спеціальностей основних понять теорії ймовірностей набуває особливої актуальності.

Поняття ймовірності здається інтуїтивно простим і зрозумілим. Якщо, наприклад, 600 разів підкинути монету, то кількість гербів, що випаде при цьому, буде наближено дорівнювати кількості випадінь решітки, тобто обидва числа будуть мало відрізнятися від 300. Тому ймовірності відповідних подій будуть дорівнювати ½. Якщо ж 600 разів підкинути кубик, то кожна з його шести граней також випаде приблизно однакову кількість разів, тобто приблизно 100 разів. Тоді ймовірності розглянутих подій будуть дорівнювати ⅙. Ці висновки ґрунтуються на звичайному здоровому глузді. Як написав у вже згаданій вище роботі «Аналітична теорія ймовірностей» П'єр Лаплас, «теорія ймовірностей є, власне кажучи, тільки перекладення здорового глузду на формули, вона дає засіб для точної оцінки того, що осягає розум вірний, хоча часто несвідомо». Але в той же час, на думку одного із засновників математичної статистики Карла Пірсона, в математиці немає іншого такого розділу, в якому так само легко припуститися помилки, як у теорії ймовірностей. Існує величезна кількість прикладів, що підтверджують дане твердження. Це так звані ймовірнісні парадокси.

У широкому розумінні парадокс (від давньогрецького παράδοξος — несподіваний, дивний) — це висловлювання, міркування чи висновок, що розбігається із загальноприйнятою думкою і видається нелогічним або суперечить здоровому глузду (часто лише при поверхневому розумінні). В історії теорії ймовірностей парадокси відігравали і продовжують відігравати надзвичайно важливу роль, виступаючи поштовхом і мотивом для її подальшого розвитку. Багато видатних математиків минулого працювали над поняттями теорії ймовірностей, зокрема розглядали й парадокси, і їхні дослідження допомогли сформувати сучасне розуміння цієї дисципліни. Такими були, наприклад:

П'єр Ферма (1601–1665) та Блез Паскаль (1623–1662), французькі математики, які зробили важливі внески в теорію ймовірностей. Їхні роботи стосувалися основи ймовірнісних розрахунків, включаючи парадокс де Мере (з цим парадоксом часто пов'язують зародження теорії ймовірностей як науки) та парадокс розподілу ставки в азартних іграх, які стали основою для подальших досліджень у цій галузі;

П'єр-Симон Лаплас (1749–1827), французький математик і астроном, один з основоположників теорії ймовірностей, який розвивав байєсівський підхід і розглядав парадокси, пов'язані з умовними ймовірностями та апостеріорними розподілами;

Жозеф Бертран (1822–1900), французький математик, який зробив значний внесок у теорію ймовірностей і розглянув кілька ймовірнісних парадоксів. Найвідоміший з них — це «парадокс Бертрана», який ілюструє труднощі у визначенні поняття випадковості в геометричному контексті.

Рональд Фішер (1890–1962), відомий британський статистик, який розробив багато основних методів статистичного аналізу. Фішер також працював над ймовірнісними проблемами, зокрема над «парадоксом днів народження», який він вивчав у контексті статистичних розрахунків.

Едвард Сімпсон (1922–2019), британський статистик, відомий своїм описом «парадоксу Сімпсона», що виникає, коли об'єднані дані з кількох груп показують одну тенденцію, тоді як розбиття даних на підгрупи виявляє протилежну. Це ілюструє, що агреговані дані можуть бути оманливими, якщо не враховувати вплив підгруп.

Безумовно, це дуже невеликий перелік математичних гігантів, які не тільки розглядали парадокси в теорії ймовірностей, а й внесли важливий вклад у розвиток математичних і статистичних теорій, що допомогло виявити і зрозуміти ці парадокси.

Імовірнісні парадокси зустрічаються в навчальній та, здебільшого, науково-популярній літературі, їх формулюють як задачі підвищеної складності, дослідницькі задачі або проблеми, задачі на кмітливість [2–5]. У той же час питання інтегрування парадоксів у навчальний процес та методика їхнього можливого використання на заняттях розглянута недостатньо.

Мета роботи — показати доцільність та можливості використання парадоксів при навчанні теорії ймовірностей, в основному зупинившись на перших вступних розділах, які мають вирішальне значення для подальшого успішного засвоєння теорії ймовірностей, а також інших дисциплін, що використовують ймовірнісні методи.

Як вже було сказано, парадокс — це істина, яка настільки суперечить здоровому глузду, що повірити в неї важко навіть після того, як правильність її підтверджена доведенням. Чудовий приклад цьому — парадокс із днями народження. Виберемо навмання 23 людини. Яка ймовірність того, що принаймні двоє з них народилися в один і той же день одного і того ж місяця (але, можливо, в різні роки)? Інтуїтивно відчувається, що ймовірність такої події має бути дуже малою, адже рік — це 365 днів. Насправді ж вона виявляється трохи вище за 0,5. А для групи з 60 або більше осіб така ймовірність взагалі перевищує 0,99! Це легко довести, використовуючи теорему множення ймовірностей і той факт, що сума ймовірностей прямої та протилежної подій дорівнює одиниці [6, 7]. Таким чином, маємо різницю між результатами математичних розрахунків та інтуїтивним сприйняттям ситуації. Парадокс днів народження можна перевірити на різних групах людей, включаючи відомих особистостей, спортивні команди або академічні студентські групи. Один із цікавих прикладів, який часто наводять, стосується президентів США. Їх список станом на 2024 р. налічує 45 осіб. Якщо перевірити їхні дати народження, можна побачити, що два президенти народились в один і той же день. Це Джеймс Нокс Полк і Воррен Гардінг: обидва народились 2 листопада (Полк у 1795 р., Гардінг — у 1865 р.). Перевірка збігу днів смерті є менш поширеним прикладом, ніж збіг днів народження. Але для президентів США він, мабуть, більш вражаючий — не два, а три президенти померли в один день: Джон Адамс і Томас Джефферсон померли 4 липня 1826 р., Джеймс Монро також помер 4 липня, але в 1831 р. Ці приклади підкреслюють парадоксальність того, що ймовірність будь-яких спільних дат (днів народження, смерті, укладання шлюбу, купівлі машини тощо) може бути досить високою навіть у невеликій групі людей. Парадокс днів народження демонструє, наскільки наше інтуїтивне сприйняття ймовірності може бути неправильним, і підкреслює важливість математичного підходу до оцінки ймовірностей.

Ще один яскравий приклад — одна із задач теорії ймовірностей, відома як парадокс Монті Холла. Задача формулюється як опис гри, що заснована на відомому американському телешоу *Let's Make a Deal* і названа на честь ведучого цієї передачі. Вона була опублікована в 1990 р. в журналі *Parade Magazine* і викликала обурені відгуки читачів, багато з яких мали наукові ступені. Гра полягає в наступному: ведучий повідомляє гравцю, що за одними з трьох дверей, які він бачить перед собою зачиненими, знаходиться головний виграш — автомобіль, а за двома іншими — по козі (будемо вважати їх втішним призом), і пропонує обрати одні з дверей. Гравець робить свій вибір. Перед тим як відчинити обрані гравцем двері і перевірити, чи виграв він головний приз, ведучий (який знає, де знаходиться автомобіль, а де — кози) відчиняє одні з двох дверей, що залишились і за якими немає виграшу. Після цього він цікавиться, чи не бажає гравець змінити свій вибір? Питання у тому, чи стануть більшими шанси виграти автомобіль, якщо гравець прийме пропозицію ведучого? Багато хто вважає (навіть серед тих, хто має технічну освіту, тобто людей, математична інтуїція яких зазвичай є доволі розвинутою), що після того, як будуть відкриті двері з козою, ймовірність знаходження автомобіля за будь-якою з двох закритих дверей буде дорівнювати ½, тож немає різниці, змінювати або не змінювати своє рішення. Однак це невірно! Зовсім нескладно обчислити (причому зробити це можна різними способами), що ймовірність виграшу збільшиться вдвічі, якщо гравець змінить свій початковий вибір [8, 9]. Багато людей з трудом усвідомлюють відповідь навіть після того, як їм наводять докладний розв'язок задачі, тому що він суперечить інтуїтивному сприйняттю ситуації. Парадокс Монті Холла доволі часто згадується в різних фільмах, книгах і серіалах (наприклад, художній фільм «21», серіали «Бруклін 9-9» та «4исла», роман «The Curious Incident of the Dog in the Night-Time» Марка Геддона, книга «Bringing Down the House» Бена Мезрича (на ній базується фільм «21») та інші), оскільки він є цікавим прикладом контрінтуїтивних результатів у теорії ймовірностей. Цей парадокс став своєрідним «класичним» прикладом для пояснення складності ймовірнісних проблем і того, як людська інтуїція може бути непослідовною, недосконалою і поверхневою стосовно математики.

Повертаємось до питання: чи доцільно розглядати парадокси теорії ймовірностей при навчанні математики? Якщо так, то яким чином це доцільно робити?

Безумовно, не варто вивчати теорію ймовірностей, розглядаючи виключно парадокси. Але... Математична освіта базується, в першу чергу, на розв'язанні великої кількості різноманітних задач. Тому цікавість задачі — важлива справа. Задача може бути цікавою з багатьох причин: тому, що цікавий зміст умови; тому, що інтуїтивно не зрозуміла можлива відповідь; тому, що вона ілюструє важливий принцип; тому, що вона важка; тому, що в розв'язанні захована «родзинка» або просто тому, що відповідь елегантна і проста. Є така думка, що розв'язання цікавих задач — це засіб для відпочинку, приємного проведення часу, але, насправді, їхня роль в становленні особистості набагато важливіша. Не викликає сумніву, що розв'язання таких задач є дуже потужним інструментом розвитку людського інтелекту. Кожному з нас протягом життя багато разів доводиться опинятися у незвичному становищі, вихід з якого можна знайти за допомогою логічних міркувань. Розв'язання цікавих задач дає таку можливість десятки разів вже в дитинстві й юності, саме тоді, коли формується інтелект людини. Парадокси теорії ймовірностей — це яскраві приклади саме таких задач [10].

Тому розгляд парадоксів теорії ймовірностей при вивченні математики є не лише доцільним, але й надзвичайно корисним. Крім того, що парадокси допомагають формувати інтелект студента, вони демонструють, як інтуїтивні уявлення про випадковість і ймовірність (які, до речі, правлять нашим світом) можуть бути неправильними, і чому математичний підхід є необхідним для вірного оцінювання ймовірностей. Аналіз парадоксів сприяє:

- розвитку логічного та критичного мислення студентів, адже парадокси часто викликають сумніви та здивування, що спонукає до аналізу та пошуку причин таких нестандартних результатів. Вони вчать не тільки раціонально аналізувати ситуації, а й доводити свої висновки;
- кращому засвоєнню студентами ключових положень теорії ймовірностей, оскільки за допомогою парадоксів у захоплюючій і доступній формі можна розглянути такі фундаментальні поняття теорії ймовірностей, як класична і геометрична ймовірність, незалежність, умовна ймовірність, випадкова величина і багато інших. Парадокси демонструють, як ці положення можуть бути застосовані для аналізу складних ситуацій;
- розумінню, як теорія ймовірностей застосовується в реальному житті, наприклад у прийнятті рішень в умовах невизначеності, в моделях випадкових процесів, у статистичних дослідженнях тощо;
- підвищенню мотивації навчання, адже розв'язання парадоксів може бути цікавою і захоплюючою задачею, що стимулює інтерес до математики взагалі та теорії ймовірностей зокрема. Вони можуть навчити студентів не тільки раціонально мислити, а й насолоджуватися процесом розв'язання складних задач;
- впровадженню елементів історизму в навчання, що підвищує загальну математичну культуру студентів.

Як же інтегрувати парадокси у навчання? Перш за все, студентам слід пояснити основні поняття та положення теорії ймовірностей, які будуть використанні для подальшого математичного обґрунтування правильного висновку. Наприклад, для наведених вище парадоксів днів народження та Монті Холла достатньо розуміти, що таке ймовірність, та знати основні теореми про ймовірність випадкових подій, тобто потрібні лише початкові знання з теорії ймовірностей. Потім на занятті можна дати представлення парадоксу, тобто описати ситуацію і запитати студентів про їхні інтуїтивні відповіді (як правило, відповіді даються різні). Після цього можна дати математичне пояснення, чому результат вийшов іншим, ніж очікувалося багатьма присутніми. Або організувати студентів у невеликі групи і попросити їх обговорити парадокс. Нехай вони разом намагаються знайти правильну відповідь, використовуючи свої знання про ймовірності. Ще один із варіантів −повністю передати повноваження студентам і заслухати на занятті підготовлену заздалегідь доповідь на тему обраного парадоксу. Тоді вже студент виконує роль викладача у формулюванні та роз'ясненні парадоксальної ситуації, а викладач лише контролює правильність пояснень та коригує їх за необхідності.

Після обговорення теоретичних аспектів можна запропонувати студентам практичне завдання, де вони зможуть перевірити отриманий результат на практиці. Наприклад, можна створити ситуацію, подібну до парадоксу Монті Холла, і дати студентам можливість відтворити цю гру. В якості головного та втішних призів можна взяти невеличкі предмети, що є поруч. Ведучий ховає ці предмети (можна просто по одному в руці, і тоді краще взяти на цю роль двох студентів, щоб були в наявності три руки), при цьому студент-«гравець» обирає кожен раз стратегію «змінити початковий вибір руки». Результат кожної гри фіксується: якщо в зміненій руці головний приз — гравець виграв, інакше — програв. Зазвичай такі ігри проходять жваво, бо вболівають і роблять ставки на виграш усі не задіяні безпосередньо в грі студенти групи. Але слід мати на увазі: якщо обмежитися 5−10 іграми — результат може бути непередбачуваним. Необхідно зробити достатню кількість експериментів, щоб побачити, що приблизно ⅔ усіх виборів закінчуються появою головного виграшу, і тому така гра буде потребувати значного часу на занятті.

Щоб позбутися цього часового обмеження, можна використати комп'ютерну симуляцію. Дуже гарно, якщо хто-небудь із студентів групи організує розрахунки в електронній таблиці або напише відповідну програму. Вочевидь, у цьому випадку кількість проведених ігор може обчислюватися сотнями тисяч, і тому ймовірність виграшу, що дорівнює ⅔, буде отримана з великою точністю.

Таким чином, парадокси теорії ймовірностей є важливим інструментом для активного навчання та розвитку математичних навичок у студентів, сприяючи їхньому глибокому розумінню та зацікавленню у цій науці.

«Цікавий відшукує рідкості тільки для того, щоб їм дивуватися; допитливий же — щоб пізнати їх і перестати дивуватися» (Рене Декарт).

Література

1. *Гончаренко Я. В., Чепорнюк І. Д.* Використання парадоксів та софізмів у навчанні теорії ймовірностей // Didactics of mathematics: Problems and Investigations. № 28. С. 94−99.

2. *Gardner M.* Mathematical puzzles and diversions. Chicago : University of Chicago Press, 1987. 255 c.

3. *Mosteller F.* Fifty challenging problems in probability with solutions. New York : Dover Publications, 1965. 95 c.

4. *Szekely G.* Paradoxes in probability theory and mathematical statistics. Budapest : Akademiai Kiado, 1986. 250 c.

5. *Конфорович А. Г.* Математичні софізми та парадокси. Київ : Рад. шк., 1983. 208 с.

6. *Goldberg S.* Direct Attack on a Birthday Problem // Mathematical Mathematics Magazine. 1976. № 49(5). С. 130–132.

7. *Mosteller F.* Understanding the Birthday Problem // The Mathematics Teacher. 1962. № 5. С. 322–325.

8. *Barbeau E.* Fallacies, Flaws, and Flimflam: The Problem of the Car and Goats // The College Mathematics Journal. 1993. № 24 (2). С. 149–154.

9. *Gnedin S.* The Mondee Gills Game // The Mathematical Intelligencer, 2011. № 34. С. 34–41.

10. *Svіщова Є. В.* Використання парадоксів теорії ймовірностей в навчальному процесі // Експертні оцінки елементів навчального процесу. Харків : Вид-во НУА, 2020. С. 58–60.

30.08.2024

Відомості про авторів:

Свіщова Євгенія Віталіївна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій і математики; Харківський гуманітарний університет «Народна українська академія»; Харків, Україна; e-mail: esvishchova@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0523-5293; Google Scholar: https://scholar.google.com.ua/citations?user=ITisRHoAAAAJ

Дьячкова Ольга Володимирівна — доцент кафедри економічної кібернетики та прикладної економіки; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна; Харків, Україна; e-mail: olga.v.dyachkova@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5751-9829; Google Scholar: https://scholar.google.com.ua/citations?user=QYVE7roAAAAJ